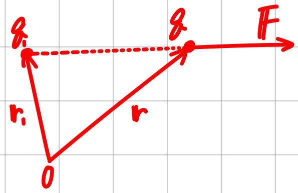
① $\boxed{F = \frac{q q_1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{r_0 - r_1}{|r_0 - r_1|^3}}$

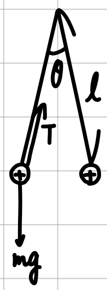
$E(r) = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{r - r_1}{|r - r_1|^3}$

$= qE(r_0)$



電場：電荷の分布により生じる、電気力のはたらく空間，またはその変化のこと。
とくにこれが時間的に変動しない場合には、静電場と呼ぶ。単位は[V/m]

演習問題1



・$T\cos\frac{\theta}{2} = mg$

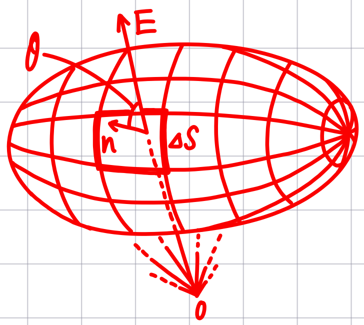
・$T\sin\frac{\theta}{2} = F = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{(2l\sin\frac{\theta}{2})^2}$

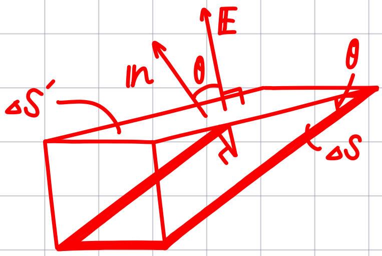
$$\frac{mg}{\cos\frac{\theta}{2}}\cdot\sin\frac{\theta}{2} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{(2l\sin\frac{\theta}{2})^2}$$

よって $q^2 = \frac{16\pi\varepsilon_0 mgl^2\sin^3\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}$ $q > 0$ より.

$$q = \sqrt{\frac{16\pi\varepsilon_0 mgl^2\sin^3\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}}$$ □

②





・$\Delta S' = \Delta S\cos\theta$

・電気力線の密度は電場の強さに比例する

よって $\frac{\Delta N}{\Delta S\cos\theta} = kE$

$\Delta N = k\overbrace{E\cos\theta}^{E\cdot n}\Delta S$

$\boxed{\Delta N = kE_n\Delta S}$

1) したがって、閉曲面内に電荷がないとき、

$k\sum(E\cdot n)\Delta S = 0 \Leftrightarrow \boxed{\int_S\{E(r)\cdot n(r)\}dS = 0}$

2) 電荷が存在するとき。（閉曲面を電荷を中心とした半径Rの球だと仮定する）

単位面積あたりの電場は $|E(R)| = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$

すなわち、$\int_{球面} E_n dS = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\cdot 4\pi R^2$

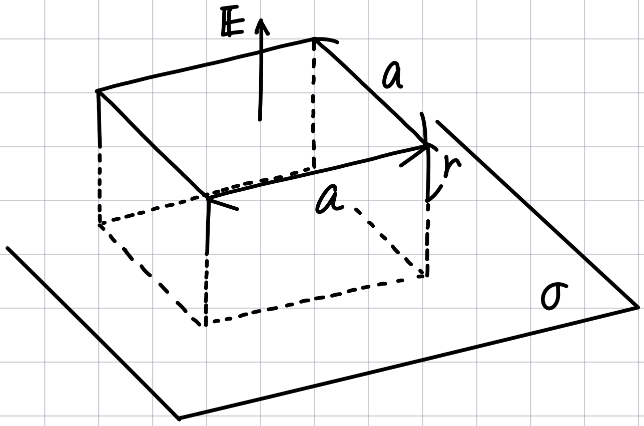
$= \frac{q}{\varepsilon_0}$

よって → 電荷密度 $\rho(r)$ を用いて

$\boxed{\int_S\{E(r)\cdot n(r)\}dS = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V\rho(r)dV}$

演習問題2

1) ガ 右辺: $\int_S \{\mathbb{E}(r)\cdot \mathbb{n}(r)\}\, dS = 2a^2 E(r)$



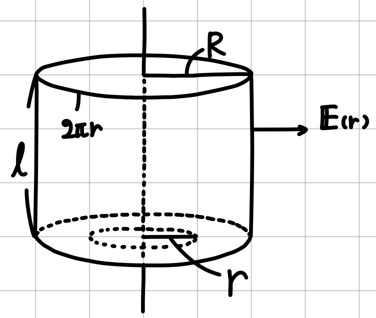
左辺: $\frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho(r)\, dV = \sigma a^2 \frac{1}{\varepsilon_0}$

よって. $2a^2 E(r) = \sigma a^2 \frac{1}{\varepsilon_0}$

$$E(r) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

□

2) $\int_S \{\mathbb{E}(r)\cdot \mathbb{n}(r)\}\, dS = 2\pi r l \cdot E(r)$



$$\frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho(r)\, dV = \begin{cases} 0 & (r < R) \\ \frac{2\pi R l \sigma}{\varepsilon_0} & (r \geq R) \end{cases}$$

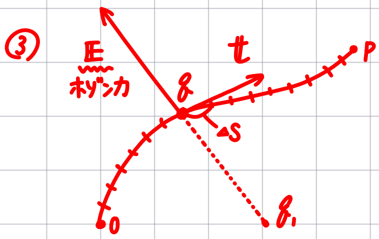
よって. $E(r) = \begin{cases} 0 & (r < R) \\ \frac{R\sigma}{r\varepsilon_0} & (r \geq R) \end{cases}$ □

3) $\int_S \{\mathbb{E}(r)\cdot \mathbb{n}(r)\}\, dS = \pi r^2 l \cdot E(r)$

$$\frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho(r)\, dV = \begin{cases} \frac{\pi r^2 l \rho}{\varepsilon_0} & (r < R) \\ \frac{\pi R^2 l \rho}{\varepsilon_0} & (r \geq R) \end{cases}$$

よって. $E(r) = \begin{cases} \frac{r\rho}{2\varepsilon_0} & (r < R) \\ \frac{R\rho}{2\varepsilon_0} & (r \geq R) \end{cases}$ □

③



ここで電荷qを$O \to P$まで準静的に動かすには（でないと加速度が生じてしまう。
外部から$q\mathbb{E}$と逆向きで等しい大きさの力$\mathbb{F}$を加える必要がある。
電荷がこの区間を移動するときの変位ベクトルは$\Delta s\,\mathbb{t}$であることから
この電荷を移動させるのに要する仕事ΔWは

$$\Delta W = \mathbb{F}\cdot(\Delta s\,\mathbb{t}) = -q\mathbb{E}\cdot\mathbb{t}\,\Delta s$$

これをOからPまで足し合わせると

$$W = -q\sum(\mathbb{E}\cdot\mathbb{t})\Delta s$$

ここで$\Delta s \to 0$の極限をとると和は積分になり、

$$\boxed{W = -q\int_{OP}\{\mathbb{E}(\mathbb{r})\cdot\mathbb{t}(\mathbb{r})\}\,ds}$$ となる。

また、空間に選んだ任意の閉じた経路では$W=0$となる。

→ 基準点Oを固定した上で積分の値をP点の位置ベクトル$\mathbb{r}$の関数として、

$$\phi(\mathbb{r}) = -\int_{OP}\{\mathbb{E}(\mathbb{r})\cdot\mathbb{t}(\mathbb{r})\}\,ds$$ と置き、$\phi(\mathbb{r})$を静電ポテンシャルまたは電位という。

→ $$\boxed{\phi(\mathbb{r}) = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_0}\right)}$$

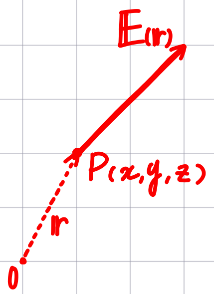
点電荷のつくる電場の場合。

→ 基準点Oを無限遠$r_0=\infty$に選ぶと、電荷q_1の位置を$\mathbb{r}_1$として、

$$\phi(\mathbb{r}) = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0|\mathbb{r}-\mathbb{r}_1|}$$

点電荷が多数あるときは、

$$\phi(\mathbb{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{|\mathbb{r}-\mathbb{r}_i|}$$
$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho(\mathbb{r}')}{|\mathbb{r}-\mathbb{r}'|}$$



また、電場のx成分、y成分、z成分はそれぞれ
ポテンシャルをx, y, zについて偏微分したものになる。
すなわち、

$$E_x(x,y,z) = -\frac{\partial\phi(x,y,z)}{\partial x}$$
$$E_y(x,y,z) = -\frac{\partial\phi(x,y,z)}{\partial y}$$
$$E_z(x,y,z) = -\frac{\partial\phi(x,y,z)}{\partial z}$$

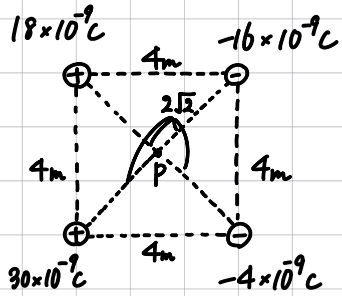
$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

$$\nabla\phi(\mathbb{r}) = \left(\frac{\partial\phi(\mathbb{r})}{\partial x}, \frac{\partial\phi(\mathbb{r})}{\partial y}, \frac{\partial\phi(\mathbb{r})}{\partial z}\right)$$

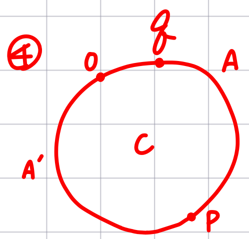
⇓

$$\boxed{\mathbb{E}(\mathbb{r}) = -\nabla\phi(\mathbb{r})}$$

演習問題.3



$$\phi(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$
$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}(18+30-16-4)\times10^{-9}$$
$$= 9.0\times10^{9}\times\frac{1}{2\times1.4}\times28\times10^{-9}$$
$$= 90 \quad \square$$



任意の閉じた経路Cについて.

電荷qをOからPまで動かすために要する仕事と.

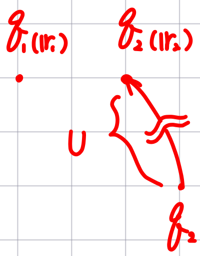
qをPからOまで戻すときに電荷が外に対してする仕事 の関係を式にすると.

$$-q\int_{OAP}(\mathbf{E}\cdot\mathbf{t})\,ds = q\int_{PA'O}(\mathbf{E}\cdot\mathbf{t})\,ds$$ となり.

初めにO→A→Pで費やしたエネルギーは.電荷がPにあるとき.すでに蓄えられていると見なせる.

よってOを基準としたP点における電荷qの位置エネルギーUは.

$$\boxed{U_P = -q\int_{OP}(\mathbf{E}\cdot\mathbf{t})\,ds = q\phi_P}$$ となる。



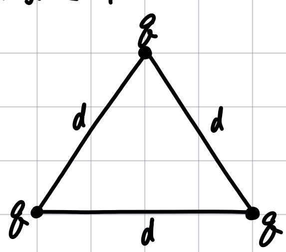
2つの点電荷の場合では.

q_1の作る電場上で.q_2を$\mathbf{r}_2$まで動かすことを考える。

すると.$\phi(\mathbf{r}_2) = \dfrac{q_1}{4\pi\varepsilon_0|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1|}$ となるので:

仕事Uは. $\boxed{U = \dfrac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1|}}$ とわかり.これを静電エネルギーという。

演習問題4



$$U = \frac{q_1\cdot q_2}{4\pi\varepsilon_0|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1|} + \frac{q_3\cdot q_1}{4\pi\varepsilon_0|\mathbf{r}_3-\mathbf{r}_1|} + \frac{q_3\cdot q_2}{4\pi\varepsilon_0|\mathbf{r}_3-\mathbf{r}_2|}$$
$$= \frac{3q^2}{4\pi\varepsilon_0 d} \quad \square$$

〈用語のまとめ〉

・電荷：電気を実体として考えたもの。電気そのものは性質であり物体ではないので、
その性質の部分を実体ととらえて議論する。

・電場：近接作用で考えたときの電荷が作る場。電荷 q が R だけ離れたまわりのところに
作る電場の大きさは、

$$E(R)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$$

もっと一般的に、位置 $\mathbf{r}_i$ にある電荷の大きさ q の点電荷が位置 $\mathbf{r}$ のところに
作る電場は方向まで含めて定式化すると

$$\mathbf{E}(\mathbf{r})=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_i}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|^3}$$

重力で考えると傾きに相当する。

・電位：電荷が電場の中を動くときに必要な仕事は、出発点と終点だけに依存して、
途中の経路によらないことから得られる、位置に依存した物理量。重力でいうと、高さに相当する。
電場と同じように定式化すると、

$$\phi(\mathbf{r})=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_i}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|}$$

・静電エネルギー：電荷が電場中のある位置に置かれることで持っている電気的なエネルギー。
重力でいうと位置エネルギーに相当する。電荷の大きさ q の点電荷が r の位置に
あるときに持っている静電エネルギーは、

$U=q\phi(r)$ となる。

⑤ 点$\mathbb{r}_0$における単位面積あたりの'電場の湧き出し量'を表す式を考えると、電場の発散は、

$$\nabla\cdot\mathbb{E}(\mathbb{r}) = \frac{\partial E_x(\mathbb{r})}{\partial x} + \frac{\partial E_y(\mathbb{r})}{\partial y} + \frac{\partial E_z(\mathbb{r})}{\partial z}$$

これより、微小領域でのガウスの法則は、

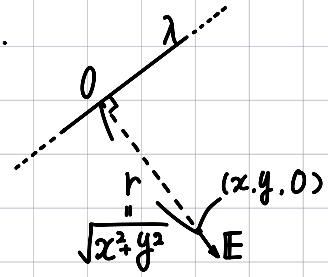
$$\boxed{\nabla\cdot\mathbb{E}(\mathbb{r}) = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\mathbb{r})}$$

↓ 電束密度 $\mathbb{D}(\mathbb{r}) = \varepsilon_0\mathbb{E}(\mathbb{r})$ を用いて、

$$\nabla\cdot\mathbb{D}(\mathbb{r}) = \rho(\mathbb{r})$$

演習問題5

1).



2-1)の問題(a)より、

$E(r) = \dfrac{\lambda}{2\pi r\varepsilon_0}$ となる。

方向に注意して、

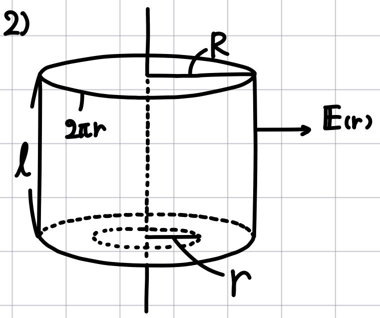
$$\mathbb{E}(\mathbb{r}) = (\mathbb{E}_x(\mathbb{r}), \mathbb{E}_y(\mathbb{r}), \mathbb{E}_z(\mathbb{r})) = \left(\frac{\lambda x}{2\pi\varepsilon_0 r^2}, \frac{\lambda y}{2\pi\varepsilon_0 r^2}, 0\right)$$

$$\nabla\cdot\mathbb{E}(\mathbb{r}) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left\{\left(\frac{1}{r^2} - \frac{2x^2}{r^4}\right) + \left(\frac{1}{r^2} - \frac{2y^2}{r^4}\right)\right\}$$

$$= \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{2}{r^2} - \frac{2(x^2+y^2)}{r^4}\right\}$$

$$= 0 \quad \square$$

2)



演習2で求めたように、

$$E(r) = \begin{cases} \dfrac{r\rho}{2\varepsilon_0} & (r < R) \\ \dfrac{R^2\rho}{2r\varepsilon_0} & (r \geq R) \end{cases}$$ となる。

$(r \geq R)$では、$\frac{1}{r}$の微分だから(1)と同様に計算でき、$\nabla\cdot\mathbb{E}(\mathbb{r}) = 0$ となる。

$(r < R)$では、

$\mathbb{E}(\mathbb{r}) = \left(\dfrac{\rho x}{2\varepsilon_0}, \dfrac{\rho y}{2\varepsilon_0}, 0\right)$ より、

$$\nabla\cdot\mathbb{E}(\mathbb{r}) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\rho x}{2\varepsilon_0}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\rho y}{2\varepsilon_0}\right)$$

$= \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$ となり、微分形のガウスの法則を満たす。 $\square$

⑤ 任意の閉じた経路Cについて成り立つ、渦なしの法則

$\int_C \{\mathbb{E}(\mathbb{r})\cdot \mathbb{t}(\mathbb{r})\} ds = 0$ もガウスの法則と同様に微分形に書き換えられる。

ここで $\mathbb{E}(\mathbb{r})$ の回転を定義する。

$$\nabla \times \mathbb{E}(\mathbb{r}) = \left(\frac{\partial E_z(\mathbb{r})}{\partial y} - \frac{\partial E_y(\mathbb{r})}{\partial z}, \frac{\partial E_x(\mathbb{r})}{\partial z} - \frac{\partial E_z(\mathbb{r})}{\partial x}, \frac{\partial E_y(\mathbb{r})}{\partial x} - \frac{\partial E_x(\mathbb{r})}{\partial y}\right)$$

$$\begin{array}{ccc} & x & \\ \nearrow & & \searrow \\ y & \leftarrow & z \end{array}$$

↳ $\boxed{\nabla \times \mathbb{E}(\mathbb{r}) = 0}$ これが微分形で書いた渦なしの法則。

演習問題6.

真空中の静電場と見なしうるには $\nabla \times \mathbb{F} = 0$, $\nabla \cdot \mathbb{F} = 0$。ポテンシャルは $\mathbb{F} = -\nabla \phi$

a). $\mathbb{F} = (2Axz, 2Ayz, A(x^2+y^2-2z^2))$

$$(\nabla \times \mathbb{F})_x = \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} = 0, \quad (\nabla \times \mathbb{F})_y = \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} = 0$$

$$(\nabla \times \mathbb{F})_z = \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbb{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = 0$$

} 真空中の静電場とみなしうる。

↳ ポテンシャルは $-\frac{1}{\nabla}\cdot \mathbb{F} = -A\{(x^2+y^2)z - \frac{2}{3}z^3\}$ □

b). $\mathbb{F} = (A(z^2+y^2), A(z^2+x^2), A(x^2+y^2))$

$(\nabla \times F_x) = \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} = 2Ay - 2Az \neq 0$ 静電場と見なしえない。 □

⑥ これまでの内容より、真空中の静電場の基本法則は、微分形式で表すと、

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbb{E}(\mathbb{r}) = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\mathbb{r}) & \cdots \text{i)} \\ \nabla \times \mathbb{E}(\mathbb{r}) = 0 & \cdots \text{ii)} \end{cases}$$ となる。

ここで $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ という微分演算子を定義すると、i) は、

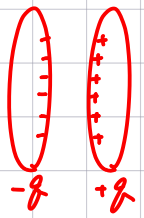
ラプラシアン

$\boxed{\nabla^2 \phi(\mathbb{r}) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\mathbb{r})}$ となる。これをポアソンの方程式という。

電荷のない真空中では、ポアソン方程式は

$\boxed{\nabla^2 \phi(\mathbb{r}) = 0}$ となる。とくにこれをラプラスの方程式という。

⑦ 2つの導体を近づけて配置した、電気を蓄えるための装置をコンデンサーという。

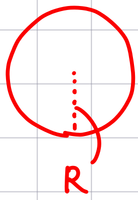


導体間の電位差 $\Delta\phi$ は、

$\boxed{q = C\Delta\phi}$ という式で表される。

→ 面積 S の2枚の導体板を d の間隔で配置すると、

$C = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$ となる。



→ 半径 R の導体球の電気容量は、

$C = 4\pi\varepsilon_0 R$ となる。

コンデンサーに蓄えられる静電エネルギーは、

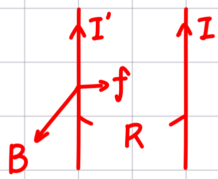
$$\boxed{U = \frac{1}{2}q\Delta\phi = \frac{1}{2}C\Delta\phi^2}$$

⑧ 電場において、$D = \varepsilon_0 E$ と定義したように、
磁場においても、電束密度 B より、磁場の強さが定義される。

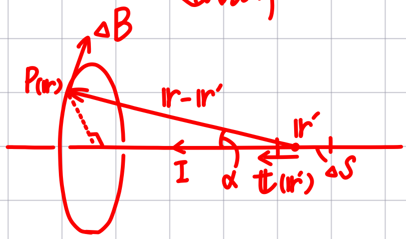
$\mathbb{H} = \frac{1}{\mu_0}\mathbb{B}$

$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$

真空の透磁率



単位長さあたりの作用する力は $f = BI'$



$$|\Delta\mathbb{B}| = \Delta B = \frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{\sin\alpha}{R^2}I\Delta S$$

・$\Delta\mathbb{B} \parallel \mathbb{t}(\mathbb{r}')\times(\mathbb{r}-\mathbb{r}')$

・$|\mathbb{t}(\mathbb{r}')\times(\mathbb{r}-\mathbb{r}')| = |(\mathbb{r}-\mathbb{r}')|\sin\alpha$

$$\Delta\mathbb{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{\mathbb{t}(\mathbb{r}')\times(\mathbb{r}-\mathbb{r}')}{|\mathbb{r}-\mathbb{r}'|^3}I\Delta S \quad \cdots \text{i)}$$

$\mathbb{r}'$ での電流密度を $\mathbb{i}(\mathbb{r}')$、微小体積を $\Delta V'$ とする

$$\Delta\mathbb{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{\mathbb{i}(\mathbb{r}')\times(\mathbb{r}-\mathbb{r}')}{|\mathbb{r}-\mathbb{r}'|^3}\Delta V' \quad \cdots \text{ii)}$$

i) $\boxed{\mathbb{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int\left\{\frac{\mathbb{t}(\mathbb{r}')\times(\mathbb{r}-\mathbb{r}')}{|\mathbb{r}-\mathbb{r}'|^3}\right\}ds}$

ii) $\boxed{\mathbb{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\left\{\frac{\mathbb{i}(\mathbb{r}')\times(\mathbb{r}-\mathbb{r}')}{|\mathbb{r}-\mathbb{r}'|^3}\right\}dV'}$

ビオ・サバールの法則
(電流 ― 磁場)

→ 全体の総和は、これを円周でかければよい

$\boxed{\oint\{\mathbb{B}(\mathbb{r})\cdot\mathbb{t}(\mathbb{r})\}ds = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\times 2\pi r = \mu_0 I}$ となる。これをアンペールの法則という。

また、一般的に電荷 q の点電荷が磁束密度 $\mathbb{B}$ の中を速度 v で運動するとき、点電荷には、

ローレンツ力 $\boxed{\mathbb{F} = q\mathbb{v}\times\mathbb{B}}$ が働く。